ΛΥΣΕΙΣ

ΓΕΝΙΚΗ ΠΑΙΔΕΙΑ 2003

ΘΕΜΑ 1ο

A. Θεωρία : Σχολικό βιβλίο σελίδα 28

B. α. Λ , β. Σ, γ. Λ, δ. Σ , ε. Σ

ΘΕΜΑ 2ο

α)

Είναι γνωστό ότι το μέγεθος του δείγματος ισούται με την αθροιστική συχνότητα της τελευταίας κλάσης. Άρα $\nu = N_5 = 40$

β)

$\nu_1 = N_1 = 5$ $\qquad f_1 = \frac{\nu_1}{\nu} = \frac{5}{40} = 0,125$

$\nu_2 = N_2 - N_1 = 15 - 5 = 10$ $\qquad f_2 = \frac{\nu_2}{\nu} = \frac{10}{40} = 0,25$

$\nu_3 = N_3 - N_2 = 20 - 15 = 5$ $\qquad f_3 = \frac{\nu_3}{\nu} = \frac{5}{40} = 0,125$

$\nu_4 = N_4 - N_3 = 35 - 20 = 15$ $\qquad f_4 = \frac{\nu_4}{\nu} = \frac{15}{40} = 0,375$

$\nu_5 = N_5 - N_4 = 40 - 35 = 5$ $\qquad f_5 = \frac{\nu_5}{\nu} = \frac{5}{40} = 0,125$

γ)

Για να βρούμε την μέση τιμή φτιάχνουμε τον παρακάτω πίνακα

Κλάσεις [,)	Κεντρική τιμή x_i	Συχνότητα ν_i	$\nu_i x_i$
0 – 2	1	5	5
2 – 4	3	10	30
4 – 6	5	5	25
6 – 8	7	15	105
8 – 10	9	5	45
Σύνολο	……..	40	210

Οπότε $\bar{x} = \frac{210}{40} = 5,25$ ώρες

ΘΕΜΑ 3ο

α)

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3x^2}{4x^2+5}=0 \Leftrightarrow 3x^2=0 \Leftrightarrow x=0$$

Επομένως το ζητούμενο σημείο είναι το (0, 0)

β)

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{3x^2}{4x^2+5}=\frac{0}{5}=0$$

γ)

$$f\,'(x)=\frac{(3x^2)'(4x^2+5)-(4x^2+5)'(3x^2)}{(4x^2+5)^2}=\frac{6x(4x^2+5)-8x(3x^2)}{(4x^2+5)^2}=\frac{30x}{(4x^2+5)^2}$$

δ)

$$f\,'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{30x}{(4x^2+5)^2}=0 \Leftrightarrow x=0$$

$$f\,'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{30x}{(4x^2+5)^2}>0 \Leftrightarrow x>0$$

$$f\,'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{30x}{(4x^2+5)^2}<0 \Leftrightarrow x<0$$

Επομένως η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

ε)

Από το (δ) παρατηρούμε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 0$, το $f(0) = 0$

ΘΕΜΑ 4ο

$t_1 = 0$, $t_2 = 0$, $t_3 = 1$, $t_4 = 2$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$

α)

$$\bar{x}=\frac{0+0+1+2+4+5}{6}=2 \text{ ώρες} \quad \text{και} \quad \delta=\frac{1+2}{2}=1{,}5 \text{ ώρες}$$

β)

$$\begin{aligned}
f\,'(x) &= 2(t_1-x)(t_1-x)'+2(t_2-x)(t_2-x)'+2(t_3-x)(t_3-x)'+2(t_4-x)(t_4-x)'+\\
&\quad +2(t_5-x)(t_5-x)'+2(t_6-x)(t_6-x)'=\\
&= -2(t_1-x)-2(t_2-x)-2(t_3-x)-2(t_4-x)-2(t_5-x)-2(t_6-x)=\\
&= -2(t_1+t_2+t_3+t_4+t_5+t_6)+12x=\\
&= -2(6\bar{x})+12x=-12\bar{x}+12x
\end{aligned}$$

Οπότε

i. $f\,'(\bar{x})=-12\bar{x}+12\bar{x}=0$

ii. $f(\bar{x})=(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2+(t_3-\bar{x})^2+(t_4-\bar{x})^2+(t_5-\bar{x})^2+(t_6-\bar{x})^2$ **(1)**

και $s^2 = \dfrac{(t_1 - \overline{x})^2 + (t_2 - \overline{x})^2 + (t_3 - \overline{x})^2 + (t_4 - \overline{x})^2 + (t_5 - \overline{x})^2 + (t_6 - \overline{x})^2}{6} \Leftrightarrow$

$6s^2 = (t_1 - \overline{x})^2 + (t_2 - \overline{x})^2 + (t_3 - \overline{x})^2 + (t_4 - \overline{x})^2 + (t_5 - \overline{x})^2 + (t_6 - \overline{x})^2$ **(2)**

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι $f(\overline{x}) = 6s^2$.

iii. Αφού $\overline{x} = 2$, το σημείο Α έχει συντεταγμένες $A(2, f(2))$

Όμως $f(2) = (0-2)^2 + (0-2)^2 + (1-2)^2 + (2-2)^2 + (4-2)^2 + (5-2)^2 =$

$= 4 + 4 + 1 + 4 + 9 = 22$

Και $f'(2) = f'(\overline{x}) = 0$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow$

$y - 22 = 0 \Leftrightarrow$

$y = 22$